Übungen zur Mathematik II für Studierende der Informatik

A. Blunck, W.- l. Huang, R. Stanik

SoSe 2006 **Blatt 2**

A: Präsenzaufgaben am 13.04.2006

1. Bestimme - falls existent - den Grenzwert für $n \to \infty$:

$$a)\ \frac{(-1)^n}{n}, \qquad b)\ \frac{4n^2-5}{3n^2+9n}, \qquad c)\ \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2}{n+3},$$

$$d)\ \frac{(-1)^n n^4}{(n+4)^4}, \qquad e)\ \frac{3n+2}{\sqrt{n^2+1}+n} \qquad f)\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

2. Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_{n+1} = {a_n}^2 + \frac{1}{4}$.
   Weise die Konvergenz dieser Folge nach!
   (Hinweis: Benutze den Satz über monotone, beschränkte Folgen. Zum Nachweis der Beschränktheit zeige durch Induktion nach n, dass $0 \le a_n \le \frac{1}{2}$ gilt.)

B: Übungsaufgaben zum 20.04.2006

1. Untersuche auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert für $n \to \infty$:

$$a)\ \frac{n^3-2}{n-1} - \frac{n^4+3n^2}{n^2+n-1} \qquad b)\ \frac{n^3-2}{n+1} - \frac{n^4+3n^2}{n^2+n-3}$$

$$c)\ \frac{(n+1)!}{n^{(n+1)}} \qquad d)\ \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^i$$

2. Berechne $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+5n+1} - \sqrt{n^2+2})$.

3. Zeige durch Anwendung des Satzes über monotone, beschränkte Folgen, dass die Folge (a_n), die durch

$$a_1 = \frac{1}{2},\ a_{n+1} = a_n(2 - a_n)$$

   definiert ist, konvergiert.

4. Unter Verwendung von $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ zeige man, dass $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}$ gilt.