Übungen zur Mathematik II für Studierende der Informatik

A. Blunck, W. Huang, R. Stanik

SoSe 2006 **Blatt 3**

Hinweis: Für das gesamte Übungsblatt wird als bekannt vorausgesetzt, dass die Funktionen $\sin$ und $\cos$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind. Außerdem wird als bekannt angenommen, dass die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ auf der Menge der nichtnegativen reellen Zahlen stetig ist.

A: Präsenzaufgaben am 20.04.2006

Aufgabe 1:

Berechne

$$\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{2n^2+1}{n^3-n+1}\right).$$

An welcher Stelle der Rechnung wird benutzt, dass die Cosinus-Funktion stetig ist?

Aufgabe 2:

Man skizziere die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und untersuche, für welche $x_0 \in \mathbb{R}$ sie stetig ist:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \\ x + \frac{1}{2} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Aufgabe 3:

Wahr oder falsch?

a) Sind f und g an der Stelle x_0 stetig, so ist auch $f+g$ an der Stelle x_0 stetig.

b) Sind f und g an der Stelle x_0 unstetig, so ist auch $f+g$ an der Stelle x_0 unstetig.

c) Ist f an der Stelle x_0 stetig und ist g an der Stelle x_0 unstetig, so ist $f+g$ an der Stelle x_0 unstetig.

B: Übungsaufgaben zum 27.04.2006

Aufgabe 1:

Gegeben seien reelle Funktionen f, g und es gelte $x_0 \in D(f)$, $f(x_0) \in D(g)$.

a) Beweise: Ist f in x_0 stetig und ist g in $f(x_0)$ stetig, so ist $g \circ f$ in x_0 stetig.

b) Widerlege (durch Angabe eines Gegenbeispiels): Ist f in x_0 unstetig und ist g in $f(x_0)$ unstetig, so ist $g \circ f$ in x_0 unstetig.

Aufgabe 2:

Berechne

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\sqrt{3n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2-2n+4}}\right).$$

An welchen Stellen der Rechnung wird benutzt, dass die beteiligten Funktionen stetig sind?

Aufgabe 3:

Gegeben seien die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Skizziere jeweils f und untersuche (mit Beweis), an welchen Stellen f stetig ist:

a) $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$

b) $f(x) = \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$

Hierbei bezeichnet $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die $\leq x$ ist.

Aufgabe 4:

Untersuche, ob die durch

$$f_0(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad f_1(x) = \begin{cases} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

definierten Funktionen $f_0, f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 = 0$ stetig sind (mit Beweis).