Aufgaben zur Klausurvorbereitung

A. Blunck:
Analysis und Lineare Algebra für Studierende der Informatik

Insgesamt sind 61 Punkte zu erreichen. Es genügt in der Regel nicht, nur das Ergebnis einer Rechnung bzw. die Antwort auf eine Frage anzugeben, sondern es sollte auch der Rechenweg ersichtlich sein bzw. eine kurze Begründung für eine Antwort gegeben werden. Viel Erfolg!

Obiger Text wird auch auf der Klausur stehen und ist zu beachten! Die Klausur wird jedoch 8 Aufgaben enthalten (darunter eine zur Linearen Algebra) und es sind entsprechend mehr Punkte zu erreichen!

Aufgabe 1 *(10 Punkte)*

Bestimme jeweils alle $x \in \mathbb{R}$, die die angegebene Ungleichung erfüllen.

a) $|2 - x| \leq 5$ *(3 Punkte)*

b) $\dfrac{x}{|x+3|} < \dfrac{1}{x-1}$ *(7 Punkte)*

Aufgabe 2 *(10 Punkte)*

Zeige, dass die durch

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} = \sqrt{3 + a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

definierte Folge konvergiert. Bestimme ihren Grenzwert.

Aufgabe 3 *(11 Punkte)*

a) Differenziere die folgenden Funktionen *(6 Punkte)*:

$$f(x) = e^x(2x^2 + 4x + 6), \quad g(x) = \frac{e^{x^2}}{x^2+1}, \quad h(x) = 4^x \cdot \sqrt{x}.$$

b) Bestimme alle lokalen Maxima und alle lokalen Minima der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = xe^x.$$

Gib an den gefundenen Extremstellen jeweils auch den Funktionswert an. *(5 Punkte)*

Aufgabe 4 *(10 Punkte)*

Berechne
$$\int \frac{2x^3 + x^2}{x^3 - 1}\, dx$$
mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung.

Aufgabe 5 *(10 Punkte)*

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

a) Bestimme das zugehörige Taylorpolynom $T_5(x)$ (an der Stelle $x_0 = 0$) durch Berechnen von $f'(x)$, $f''(x)$, $\ldots$, $f^{(5)}(x)$. *(3 Punkte)*

b) Gib eine Formel für $f^{(n)}(x)$ an ($n \in \mathbb{N}$) und bestimme damit die Taylorreihe von f. *(3 Punkte)*

c) Leite die Taylorreihe von f aus der bekannten Taylorreihe von e^x her. *(4 Punkte)*

Aufgabe 6 *(10 Punkte)*

Berechne $\iint_G f(x, y)\, d(x, y)$

a) für $f(x, y) = x - 2y$ und das Rechteck G mit den Eckpunkten $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(3, 1), (3, 2)$, *(3 Punkte)*

b) für $f(x, y) = x$ und das Dreieck G mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(4, 0)$ (Hinweis: Zerlege G in zwei Dreiecke.) *(7 Punkte)*