Übungen zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende der Informatik (Analysis und Lineare Algebra)“

T. Andreae, R. Stanik, K. Taubert

SS 2007 **Blatt 3**

Hinweis: Die Funktionen sin und cos werden als aus der Schule bekannt vorausgesetzt; grundlegende Eigenschaften dieser Funktionen findet man auch im Skript S. 43 f. Für das gesamte Übungsblatt wird insbesondere als bekannt vorausgesetzt, dass die Funktionen sin und cos auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind. Außerdem wird als bekannt angenommen, dass die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ auf der Menge der nichtnegativen reellen Zahlen stetig ist.

A: Präsenzaufgaben am 19. 4. 2007

Aufgabe 1:
Es sei

$$a_n = \frac{\sqrt{3n^2 - 2n + 5} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 - n + 1} + 4n} \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Man berechne $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$! An welcher Stelle der Berechnung wird benutzt, dass die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ stetig ist?

Aufgabe 2:
Man berechne

$$\lim_{n \to \infty} \cos\left(\frac{2n^2 + 1}{n^3 - n + 1}\right).$$

An welcher Stelle der Rechnung wird benutzt, dass die Cosinus-Funktion stetig ist?

Aufgabe 3:
Man skizziere folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und untersuche auf Stetigkeit:

$$f(x) = x - \lfloor x \rfloor.$$

Aufgabe 4:
Wahr oder falsch?
Sind f und g an der Stelle x_0 unstetig, so ist auch $f + g$ stets an der Stelle x_0 unstetig.

B: Übungsaufgaben zum 26. 4. 2007

Aufgabe 1:

Gegeben seien reelle Funktionen f, g und es gelte $x_0 \in D(f)$, $f(x_0) \in D(g)$.

a) Beweisen Sie: Ist f in x_0 stetig und ist g in $f(x_0)$ stetig, so ist $g \circ f$ in x_0 stetig.

b) Widerlegen Sie (durch Angabe eines Gegenbeispiels): Ist f in x_0 unstetig und ist g in $f(x_0)$ unstetig, so ist $g \circ f$ in x_0 unstetig.

Aufgabe 2:

Man berechne

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2-n+5}}\right).$$

An welchen Stellen der Rechnung wird benutzt, dass die beteiligten Funktionen stetig sind?

Aufgabe 3:

Untersuchen Sie, für welche $x_0 \in \mathbb{R}$ die durch

$$f_0(x) := \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad f_1(x) := \begin{cases} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

definierten Funktionen $f_0, f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sind. (Es ist also insbesondere die Stetigkeit im Punkt $x_0 = 0$ zu untersuchen!)

Aufgabe 4:

Man skizziere die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und untersuche, für welche $x_0 \in \mathbb{R}$ diese Funktionen stetig sind.

a) $f(x) = \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$,

b) $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.