

# Übungen zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende der Informatik (Analysis und Lineare Algebra)“

T. Andreae, R. Stanik, K. Taubert

SS 2007

Blatt 7

## A: Präsenzaufgaben am 24.5.2007

1. Weisen Sie die Konvergenz von  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^{3i}}$  nach

- a) mit dem Quotientenkriterium
- b) mit dem Wurzelkriterium.

2. Konvergent oder divergent?

a)  $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{i}{i+1}$       b)  $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{i}{2^i}$       c)  $\sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^i$ .

Für c) gebe man (falls möglich) den Grenzwert an.

3. a) Berechnen Sie die Taylorpolynome  $T_0(x), T_1(x), \dots, T_9(x)$  von  $f(x) = \cos x$  (an der Stelle  $x_0 = 0$ ).

b) Benutzen Sie die in a) berechneten Taylorpolynome  $T_1(x), T_3(x), T_5(x), T_7(x), T_9(x)$  zur Berechnung von schrittweise verbesserten Näherungswerten für  $\cos 1$ .

Vergleichen Sie mit  $\cos 1 \approx 0.5403023$  !

## B: Übungsaufgaben zum 7.6.2007

1. Berechnen Sie:

a)  $\int_3^{\infty} \frac{1}{x^4} dx$       b)  $\int_3^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$       c)  $\int_{-\infty}^0 e^x dx$       d)  $\int_0^3 \frac{1}{x^2} dx$ .

2. a) Entscheiden Sie, ob Konvergenz oder Divergenz vorliegt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+2}}{6^i}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot i}{2i+1}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{\sqrt{i}}.$$

Für die ersten beiden dieser Reihen : geben Sie (falls existent) den Grenzwert an.

b) Zeigen Sie die Konvergenz der Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2}{2^{i+1}}$  sowohl mit dem Quotienten- als auch mit dem Wurzelkriterium.

3. Bestimmen Sie diejenigen  $x \in \mathbb{R}$ , für die Konvergenz vorliegt

a)  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^i}{i^2} x^i$ ,   b)  $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i i^2 x^i$ ,   c)  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^2}{(i+2)!} x^i$ ,   d)  $\sum_{i=0}^{\infty} (2i+1)! x^i$ .

4. Berechnen Sie für  $\sin x$  die Taylorpolynome  $T_0(x), \dots, T_8(x)$  (an der Stelle  $x_0 = 0$ ). Benutzen Sie  $T_2(x), T_4(x), T_6(x)$  und  $T_8(x)$  zur Berechnung von Näherungswerten für  $\sin 0.5$ . Schätzen Sie für alle gefundenen Näherungswerte den Fehler ab (vergl. Skript S. 96).

5. a) Berechnen Sie die Taylorpolynome  $T_0(x), \dots, T_4(x)$  für  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$  an der Stelle  $x_0 = 0$ .

b) Wie a) für  $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ .

c) Berechnen Sie das Taylorpolynom  $T_5(x)$  von  $f(x) = e^x \cdot \cos x$  (an der Stelle  $x_0 = 0$ ).

6. (*Wiederholungsaufgabe*)

a) Differenzieren Sie:  $f(x) = e^{\sin(\sqrt{x})}$  und  $g(x) = x^{\cos x}$  (für  $x > 0$ ).

b) Integrieren Sie:  $\int e^{\sqrt[3]{2x+1}} dx$ ,  $\int \frac{x^3+4x+2}{x^2+1} dx$  und  $\int \frac{7x-16}{x^2-5x+6} dx$ .