

Übungen zur Vorlesung "Diskrete Mathematik" für Studierende der Informatikstudiengänge

T. Andreae, A. Blunck, H. Kiechle, M. Kriesell, P. Reuter.

WS 05/06

Blatt 11

A: Präsenzaufgaben am 19.01.2006

1. Welche der folgenden Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein Untervektorraum des \mathbb{R}^n ?
 - a) $U = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = \dots = x_n\}$.
 - b) $U = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 1\}$.
 - c) $U = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$.
2. a) Man zeige, dass die folgenden Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind:
 $v_1 = (0, 3, 2), v_2 = (0, 3, 0), v_3 = (3, 2, 1)$.

Anleitung: Man nehme an, dass für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ gilt: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = (0, 0, 0)$.
Daraus folgere man $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

b) Man zeige, dass die folgenden Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ linear abhängig sind:
 $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (1, 1, 1), v_3 = (3, 4, 5)$.
3. Man gebe eine (geometrische) Beschreibung der Untervektorräume des \mathbb{R}^2 sowie des \mathbb{R}^3 .

B: Übungsaufgaben zum 26.01.2006

1. V sei ein Vektorraum über einem Körper K ; U_1, U_2 seien Untervektorräume von V .
 - a) Man zeige, dass $U_1 \cap U_2$ ein Untervektorraum ist.
 - b) Man zeige, dass $U_1 + U_2$ ein Untervektorraum ist.
 - c) Man zeige durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass Entsprechendes für $U_1 \cup U_2$ nicht gilt.
2. Es sei K ein Körper. Für $\alpha \in K$ definieren wir

$$U_\alpha := \{(x_1, x_2, x_3) \in K^3 : x_1 + x_2 + x_3 = \alpha\}.$$

Man beweise: U_α ist genau dann ein Untervektorraum von K^3 , wenn $\alpha = 0$ ist.

3. a) Man zeige, dass die folgenden Vektoren $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind:
- b) $v_1 = (1, 3, 0, 1), v_2 = (0, 2, 0, 1), v_3 = (1, 2, 4, 2), v_4 = (0, 1, 0, 1)$.
- b) Für beliebige Vektoren $u_1, u_2, u_3, u_4 \in \mathbb{R}^4$
- $$w_1 = u_1$$
- $$w_2 = u_1 + u_2$$
- $$w_3 = u_1 + u_2 + u_3$$
- $$w_4 = 2u_2 + u_3$$
- $$w_5 = u_4$$
- i) Sind w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 linear abhängig?
- ii) Sind w_1, w_2, w_3, w_4 linear abhängig?
4. a) Man zeige, dass die Vektoren $(b, 1, 1), (b, 1, 0), (b, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ genau dann linear abhängig sind, wenn $b = 0$ gilt.
- b) Für welche $c \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $(c, 1, 1), (c^2, 1, 0), (c^2, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig?