Übungen zur Vorlesung "Diskrete Mathematik" für Studierende der Informatikstudiengänge

T. Andreae, A. Blunck, H. Kiechle, M. Kriesell, P. Reuter.

WS 05/06 **Blatt 8**

A: Präsenzaufgaben am 15.12.2005

1. Es sei $G = \{1, -1, i, -i\} \subseteq \mathbb{C}$; wir betrachten die gewöhnliche Multiplikation $\cdot$ komplexer Zahlen.

   a) Man stelle die Multiplikationstabelle für G auf und zeige anhand dieser Tabelle, dass G bezüglich $\cdot$ eine Gruppe bildet.

   b) Ist diese Gruppe zyklisch?

2. Es seien a, b, c Elemente einer Gruppe.

   a) Man erläutere (kurz), wieso $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ gilt.

   b) Wie lautet die entsprechende Formel für $(abc)^{-1}$?

3. Man zeige, dass folgendes gilt (wenn man isomorphe Gruppen als gleich ansieht):

   a) Es gibt nur eine Gruppe der Ordnung 2.

   b) Es gibt nur eine Gruppe der Ordnung 3.

   Hinweis zu Aufgabe 3: Man bezeichne die Gruppenelemente mit 1 und a bzw. 1, a, b und überlege sich, wie die zugehörigen Gruppentafeln aussehen müssen.

B: Übungsaufgaben zum 22.12.2005

1. a) wie Abschnitt 6.2, S. 127

   b) wie Abschnitt 6.2, S. 127 Hinweis: Die Rechteckgruppe besitzt vier Elemente, nämlich die Identität, eine Drehung um $180°$ und zwei Spiegelungen; man wähle für diese Elemente die Bezeichnungen i, r, x, y.)

   c) G sei die Rechteckgruppe, H sei die Quadratgruppe. Ist G kommutativ? Ist G zyklisch? Ist H kommutativ? Ist H zyklisch?
   (Man gebe kurze Begründungen für die Antworten!)

2. Es sei M die Menge der Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   wobei die Einträge Elemente aus $\mathbb{Z}_7$ sein sollen und $a \neq 0$ sein soll.

a) Man zeige, dass M eine Gruppe bezüglich der Matrizenmultiplikation ist.

b) Man bestimme die Ordnung von M sowie die Ordnungen der Elemente

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. a) H und K seien Untergruppen von G. Man zeige, dass dann auch $H \cap K$ eine Untergruppe von G ist.

   b) Gilt die entsprechende Aussage auch für die Vereinigung zweier Untergruppen? (Hinweis zu b): Man betrachte die Dreiecksgruppe $G_\triangle$ und wähle H und K als Untergruppen der Ordnung 2.)

   c) Es seien a, b, c Elemente einer Gruppe. Man vereinfache den folgenden Ausdruck:

$$(a\,c\,b)^{-1}\,a\,(a\,b\,c^{-1})^{-1}.$$

4. Man zeige, dass folgendes gilt (wenn man isomorphe Gruppen als gleich ansieht):

   Es gibt genau zwei verschiedene Gruppen der Ordnung 4.

   Anleitung zu Aufgabe 4:
   Man zeige, dass es außer der zyklischen Gruppe $G =< a >= \{1, a, a^2, a^3\}$ bis auf Isomorphie nur noch eine weitere Gruppe der Ordnung 4 gibt. Man beginne den Beweis so: Sei $G = \{1, a, b, c\}$ eine nicht zyklische Gruppe.
   Man überlege sich dann, welche Ordnung a, b und c aufgrund von Folgerung 1, S. 161 haben müssen. Danach zeige man, dass damit die Einträge der Gruppentafel bereits feststehen.

   Abschließend finde man unter den Gruppen, die wir bereits kennen gelernt haben, ein Beispiel für eine nicht zyklische Gruppe der Ordnung 4.