

Übungen zur Vorlesung „Diskrete Mathematik“ für Studierende der Informatikstudiengänge

T. Andreae, H.-J. Bandelt, H. Strade

WS 2006/07

Blatt 8

A: Präsenzaufgaben am 14.12.2006

1. Es sei $G = \{1, -1, i, -i\} \subseteq \mathbb{C}$; wir betrachten die gewöhnliche Multiplikation \cdot komplexer Zahlen.
 - a) Man stelle die Multiplikationstabelle für G auf und zeige anhand dieser Tabelle, dass G bezüglich \cdot eine Gruppe bildet.
 - b) Ist diese Gruppe zyklisch?
2. Es seien a, b, c Elemente einer Gruppe.
 - a) Man erläutere (kurz), wieso $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ gilt.
 - b) Wie lautet die entsprechende Formel für $(abc)^{-1}$?
3. Man zeige, dass folgendes gilt (wenn man isomorphe Gruppen als gleich ansieht):
 - a) Es gibt nur eine Gruppe der Ordnung 2.
 - b) Es gibt nur eine Gruppe der Ordnung 3.

Hinweis zu Aufgabe 3: Man bezeichne die Gruppenelemente mit 1 und a bzw. $1, a, b$ und überlege sich, wie die zugehörigen Gruppentafeln aussehen müssen.

B: Übungsaufgaben zum 21.12.2006

1.
 - a) G sei die Quadratgruppe, wobei die Elemente von G wie in Abschnitt 7.2 mit i, r, s, t, w, x, y, z bezeichnet seien. Man berechne $r * x, y * s, r * t, x * y$ und $y * y$.
 - b) Man definiere (wie in Abschnitt 7.2 angedeutet) die Rechteckgruppe H und stelle die zugehörige Gruppentafel auf. (Hinweis: Die Rechteckgruppe besitzt vier Elemente, nämlich die Identität, eine Drehung um 180° und zwei Spiegelungen; man wähle für diese Elemente die Bezeichnungen i, r, x, y .)
 - c) Für G und H wie in a), b): Ist G kommutativ? Ist G zyklisch? Ist H kommutativ? Ist H zyklisch? (Man gebe kurze Begründungen für die Antworten!)
2. Es sei M die Menge der Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wobei die Einträge Elemente aus \mathbb{Z}_7 sein sollen und $a \neq 0$ sein soll. Wie in Beispiel 6 (Abschnitt 7.2) zeigt man, dass M eine Gruppe bezüglich der Matrizenmultiplikation ist. (Dass dies tatsächlich so ist, ist nicht Gegenstand der Aufgabe, sondern werde vorausgesetzt.)

a) Man bestimme die Ordnung von M sowie das Inverse von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Man bestimme die Ordnungen der Elemente

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. a) H und K seien Untergruppen von G . Man zeige, dass dann auch $H \cap K$ eine Untergruppe von G ist.
- b) Gilt die entsprechende Aussage auch für die Vereinigung zweier Untergruppen? (Hinweis zu b): Man betrachte die Dreiecksgruppe G_Δ und wähle H und K als Untergruppen der Ordnung 2.)
- c) Es seien a, b, c Elemente einer Gruppe. Man vereinfache den folgenden Ausdruck:

$$(ab^{-1}c)^{-1}a(a^{-1}c^{-1}b)^{-1}.$$

4. Man zeige, dass folgendes gilt (wenn man isomorphe Gruppen als gleich ansieht):

Es gibt genau zwei verschiedene Gruppen der Ordnung 4.

Anleitung zu Aufgabe 4: Man zeige, dass es außer der zyklischen Gruppe $G = \langle a \rangle = \{1, a, a^2, a^3\}$ bis auf Isomorphie nur noch eine weitere Gruppe der Ordnung 4 gibt. Man beginne den Beweis so: Sei $G = \{1, a, b, c\}$ eine nicht zyklische Gruppe.

Man überlege sich dann, welche Ordnung a, b und c aufgrund von Folgerung 1 in Abschnitt 7.8 haben müssen. Danach zeige man, dass damit die Einträge der Gruppentafel bereits feststehen.

Abschließend find man unter den Gruppen, die wir bereits kennen gelernt haben, ein Beispiel für eine nicht zyklische Gruppe der Ordnung 4.