Übungen zur Vorlesung „Diskrete Mathematik“ für Studierende der Informatikstudiengänge

T. Andreae, H. J. Bandelt, H. Strade

WS 06/07 **Blatt 10**

A: Präsenzaufgaben am 11.01.2007

1. Gegeben sei die Rekursion $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$ $(n \geq 0)$.
   a) Man berechne $u_2, \ldots, u_8$ mit Hilfe der Rekursion.
   b) Man stelle die zugehörige Hilfsgleichung auf und ermittle eine explizite Formel für u_n.
   c) Man berechne u_8 mit Hilfe der in b) aufgestellten Formel.
2. Welche der folgenden Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$?
   a) $U = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = \cdots = x_n\}$.
   b) $U = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 1\}$.
   c) $U = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$.
3. Man zeige durch Anwendung der Definition der linearen Unabhängigkeit (Skript Seite 237), dass die folgenden Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind:
   $v_1 = (0, 3, 2)$, $v_2 = (0, 3, 0)$, $v_3 = (3, 2, 1)$.
   <u>Anleitung</u>: Man nehme an, dass für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ gilt: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = (0, 0, 0)$. Daraus folgere man $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

B: Übungsaufgaben zum 18.01.2006

1. Man finde eine explizite Formel für die folgenden Rekursionen.
   a) $u_0 = 2$, $u_1 = 4$, $u_{n+2} = -4u_{n+1} + 21u_n$ $(n \geq 0)$.
   b) $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_{n+2} = -4u_{n+1} - u_n$ $(n \geq 0)$.
   c) $u_0 = 1$, $u_1 = 20$, $u_{n+2} = 24u_{n+1} - 144$ $(n \geq 0)$.
   d) $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 17$, $u_{n+3} = u_{n+2} + 5u_{n+1} + 3u_n$ $(n \geq 0)$.
2. Man finde eine explizite Formel für die Rekursion
   $u_0 = 0$, $u_1 = 4$, $u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 3n - 1$ $(n \geq 0)$.
   <u>Hinweis</u>: Man gehe wie in Abschnitt 9.2 vor; einziger Unterschied: Die Hilfsgleichung der zugehörigen homogenen Gleichung besitzt die doppelte Nullstelle 2, woraus folgt, dass die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $u_n = (Cn + D)2^n$ $(n \geq 0)$ lautet.
3. V sei ein Vektorraum über einem Körper K; U_1, U_2 seien Untervektorräume von V.
   a) Man zeige, dass $U_1 \cap U_2$ ein Untervektorraum von V ist.
   b) Man zeige durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass Entsprechendes für $U_1 \cup U_2$ nicht gilt.
   c) Für $b \in K$ sei $U_b := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in K^4 : x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = b\}$. Man beweise: U_b ist genau dann ein Untervektorraum von K^4, wenn $b = 0$.

4. a) Man zeige durch Anwendung der Definition der linearen Unabhängigkeit (Skript Seite 237), dass die folgenden Vektoren $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind: $v_1 = (4, 4, 4, 4)$, $v_2 = (0, 3, 3, 3)$, $v_3 = (0, 0, 2, 2)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1)$.
Anleitung: Man nehme an, dass für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ gilt: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = (0, 0, 0, 0)$. Daraus folgere man $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

b) Wie a) für $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (2, 2, 5, 1)$, $v_3 = (1, 2, 0, 0)$, $v_4 = (1, 3, 0, 1)$.

c) Man zeige, dass die folgenden Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ linear abhängig sind: $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (1, 1, 1)$, $v_3 = (3, 4, 5)$.

d) Man zeige, dass die Vektoren $(1, 0, a), (0, 1, a), (1, 1, a) \in \mathbb{R}^3$ genau dann linear unabhängig sind, wenn $a \neq 0$ gilt.