

# Übungen zur Vorlesung „Diskrete Mathematik“ für Studierende der Informatikstudiengänge

T. Andreae, H.-J. Bandelt, H. Strade

WS 2006/07

Blatt 11

## A: Präsenzaufgaben am 18.1.2007

1. Die Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sei gegeben durch  $f(x_1, x_2) = (x_2, x_1^2)$ . Handelt es sich um eine lineare Abbildung?
2. Die Abbildungen  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  und  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  seien gegeben durch  $g(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$  und  $h(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2 + 1)$ . Prüfen Sie sowohl für  $g$  als auch für  $h$ , ob eine lineare Abbildung vorliegt.
3. Es sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine lineare Abbildung mit  $f(1, 0, 0) = (1, 2)$ ,  $f(0, 1, 0) = (-1, 0)$  und  $f(0, 0, 1) = (3, 1)$ . Man berechne  $f(v)$  für  $v = (-3, 7, 5)$ .
4. Für die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die durch  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_3)$  gegeben ist, bestimme man alle Elemente, die im Kern von  $f$  liegen.

## B: Übungsaufgaben zum 25.1.2007

1. Für welche  $b \in \mathbb{R}$  sind die Vektoren  $(2, 2, b)$ ,  $(1, 0, b^2)$ ,  $(0, 1, b^2) \in \mathbb{R}^3$  linear unabhängig?
2. a) Für die beiden folgenden Abbildungen überprüfe man, ob es sich um eine lineare Abbildung handelt:  
 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, x_1(x_1 + x_2))$ ,  
 $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 2x_2, x_2 + x_3)$ .  
b) Führen Sie im Beweis von Feststellung 1 (Skript Seite 251) den Nachweis von (ii) durch.  
c) Führen Sie im Beweis von Feststellung 2 (Skript Seite 252) den Nachweis von (i) durch.
3. a) Für die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die durch  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_3)$  gegeben ist, bestimme man alle Elemente, die in Kern  $f$  liegen. Welche Dimension besitzt Kern  $f$ ? Man gebe eine Basis von Kern  $f$  an!  
b) Für die lineare Abbildung  $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die durch  $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, x_3 + x_4)$  gegeben ist, bestimme man alle Elemente, die in Kern  $g$  liegen. Welche Dimension besitzt Kern  $g$ ? Man gebe eine Basis von Kern  $g$  an!  
c) Für  $f$  und  $g$  wie in a) bzw. b) gebe man  $\text{rg } f$  bzw.  $\text{rg } g$  an (Hinweis: Dimensionsformel). Ist  $f$  bzw.  $g$  surjektiv? (Geben Sie eine kurze Begründung für Ihre Antwort.)
4. Beweisen Sie Feststellung 8 (Skript Seite 257).