Übungen zur Vorlesung „Diskrete Mathematik“ für Studierende der Informatikstudiengänge

T. Andreae, H.-J. Bandelt, H. Strade

WS 2006/07 **Blatt 12**

A: Präsenzaufgaben am 25.1.2007

1. Es sei $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die zu der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ gehörige lineare Abbildung. Man gebe n und m an sowie $f_A(x)$ für $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

2. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch $f(x_1, x_2) = (x_2, x_1 + 2x_2, 3x_1 - x_2)$. Man gebe die Matrix A an, die zu dieser linearen Abbildung gehört. (Gefragt ist also nach der Matrix A, für die $f_A(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$ für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt. *Hinweis*: Man denke an die Regel „Die Spalten sind die Bilder der Einheitsvektoren“; vgl. Skript Seite 262.)

3. a) Mit Hilfe von elementaren Umformungen bestimme man den Rang der folgenden (reellen) Matrix:
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & 17 \end{pmatrix}$$
   b) Verwenden Sie das in a) erhaltene Ergebnis zur Beantwortung folgender Fragen:
   Sind die Spalten von A linear abhängig oder unabhängig? Sind die Zeilen von A linear abhängig oder unabhängig? Ist die zu A gehörige lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ surjektiv? Ist diese Abbildung injektiv?

4. Gegeben seien die reellen Matrizen
$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ und $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$. Ist es möglich, durch elementare Umformungen A_1 in A_2 zu überführen?

B: Übungsaufgaben zum 1.2.2007

1. a) Für jede der folgenden Abbildungen überprüfe man anhand der Definition auf S. 250 des Skripts, ob es sich um eine lineare Abbildung handelt.
   (i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2) \mapsto (3x_1 + x_2, x_1(x_1 + x_2))$
   (ii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + 3x_3)$
   (iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_1 + 4)$
   b) Für diejenigen Abbildungen f aus a), die linear sind, gebe man die zugehörige Matrix A an.

c) Die Abbildung f sei wie oben in (ii) und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch $(u_1, u_2, u_3) \mapsto (3u_1 + u_2 - u_3, u_1 + 2u_2 + 3u_3)$. Geben Sie die Matrix an, die zu g gehört, und berechnen Sie aus den Matrizen für f und g diejenige Matrix, die zu $g \circ f$ gehört.

2. Es sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung. Für die Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_4$ gelte$f(e_1) = (1, 0, 2)$, $f(e_2) = (-1, 1, 1)$, $f(e_3) = (3, 3, 3)$, $f(e_4) = (0, 2, 0)$. Man berechne $f(v)$ für $v = (2, 1, 3, -1)$ auf zwei Arten:

   a) ohne die zugehörige Matrix aufzustellen (nur mit Hilfe der Linearitätsbedingungen);

   b) man stelle die zu f gehörige Matrix A auf und berechne $f(v)$ mit Hilfe von A.

3. a) Mit Hilfe von elementaren Umformungen bestimme man den Rang der folgenden reellen Matrix:
$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \\ 11 & 2 & -1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   b) Beantworten Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus a): Ist die zu A gehörige lineare Abbildung $f_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ injektiv? Ist f_A surjektiv? Ist A invertierbar? Gilt $\dim \operatorname{Kern} f_A = 2$?(Geben Sie kurze Begründungen für Ihre Antworten!)

4. Man berechne die inversen Matrizen der reellen Matrizen A, B, C:

   a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

   b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

   c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$