Übungen zur Vorlesung „Diskrete Mathematik“ für Studierende der Informatikstudiengänge

T. Andreae, H.-J. Bandelt, H. Strade

WS 2006/07 **Blatt 13**

A: Präsenzaufgaben am 1.2.2007

1. Für das folgende lineare Gleichungssystem stelle man zunächst die zugehörige erweiterte Matrix auf und löse das Gleichungssystem anschließend mit dem Gaußschen Algorithmus:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 &= 9 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 4x_4 &= 13 \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 7x_4 &= 7 \end{aligned}$$

2. Man überprüfe das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ auf Lösbarkeit und eindeutige Lösbarkeit, und zwar verwende man die Feststellungen 3 und 4 (Skript Seite 285):

   a) für $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

   b) für $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

   c) für $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

B: Übungsaufgaben zum 8.2.2007

1. Man löse die drei linearen Gleichungssysteme aus Präsenzaufgabe 2 mit dem Gaußschen Algorithmus. Im Fall des dritten Gleichungssystems c) gebe man die Lösungsmenge $\text{Lös}(A, b) \subseteq \mathbb{R}^2$ auch in Form einer Zeichnung an (siehe auch Skript Seite 248).

2. Man löse die folgenden linearen Gleichungssysteme $Ax = b$ mit dem Gaußschen Algorithmus:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

   (c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

   (d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$.

3. α) Bei welchem der Gleichungssysteme aus Aufgabe 2 ist die Lösungsmenge $\text{Lös}(A, b)$ eine Gerade des $\mathbb{R}^3$? Und bei welchem dieser Gleichungssysteme ist $\text{Lös}(A, b)$ eine Ebene des $\mathbb{R}^3$?

   β) Bei welchen Gleichungssystemen aus Aufgabe 2 ist $\text{Lös}(A, b)$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$?

   γ) Man gebe eine reelle 3×3-Matrix A und ein $b \in \mathbb{R}^3$ an, so dass gilt: Die Lösungsmenge $\text{Lös}(A, b)$ von $Ax = b$ ist ein 1-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$.

4. Bestimmen Sie mit dem Gaußschen Algorithmus die Lösungsmenge von

$$Ax = b \quad \text{für} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \text{a)} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

C: Präsenzaufgabe am 8.2.2007

Die folgende Aufgabe ist eine ehemalige **Klausuraufgabe**, bei der man insgesamt 17 Punkte erreichen konnte[1)]:

a) Es sei $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 \neq x_2\}$. Ist U ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$ (1 Punkt)

b) Man bestimme diejenigen $a \in \mathbb{R}$, für die die Vektoren $v_1 = (1, a^2), v_2 = (4, 3) \in \mathbb{R}^2$ linear abhängig sind. (2 Punkte)

c) Man weise anhand der Definition der linearen Unabhängigkeit nach, dass die Vektoren $v_1 = (3, 2, 1), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (1, 1, 1) \in R^3$ linear unabhängig sind. (2 Punkte)

d) Die Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch $g(x_1, x_2) = (x_1 x_2, 0)$. Handelt es sich um eine lineare Abbildung? (2 Punkte)

e) Wieviele injektive lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ gibt es? Mehr als eine? Genau eine? Gar keine? (Kurze Begründung!) (3 Punkte)

f) $A \in M(4 \times 3, \mathbb{R})$ sei gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & 10 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix};$$

f_A sei die zugehörige lineare Abbildung. Man bestimme eine Basis von $\text{Kern} f_A$! Welche Dimension hat das Bild von f_A? Man gebe eine Basis von $\text{Bild} f_A$ an! (7 Punkte)

[1)] Insgesamt waren 72 Punkte zu erreichen. Es genügt in der Regel nicht, nur das Ergebnis einer Rechnung bzw. die Antwort auf eine Frage anzugeben, sondern es sollte auch der Rechenweg ersichtlich sein bzw. eine kurze Begründung für eine Antwort gegeben werden.