# Übungen zu Mathematik III für Studierende der Informatik

**T. Andreae, R. Stanik**

**WS 05/06** **Blatt 10**

## A: Präsenzaufgaben am 26.01.2006

1. Im Jänich werden auf S. 179 zwei Beispiele für Skalarprodukte genannt:

   a) Das Standard- Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$

   b) $< f, g >:= \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ auf dem reellen Vektorraum $V$ der stetigen Funktionen von $[-1, 1]$ nach $\mathbb{R}$.

   Man zeige, das es sich in beiden Fällen tatsächlich um Skalarprodukte handelt.

2. Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ versehen mit dem üblichen Skalarprodukt.

   a) Es sei $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$.

   Für welche $i, j$ gilt $a_i \perp a_j$?

   b) Man berechne den Öffnungswinkel $\alpha(x, y)$ für

   $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   Hinweis: Man berechne zunächst $\cos\alpha(x, y)$ (siehe Jänich S. 181); anschließend $\alpha(x, y)$ mit Taschenrechner.

## B: Übungsaufgaben zum 02.02.2006

1. Man zeige, dass durch die folgende Festsetzung ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert wird: Für $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$< x, y >:= x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2.$$

2. Es seien $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ beliebige Vektoren des $\mathbb{R}^n$. Man prüfe, ob durch eine der folgenden Formeln ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ definiert wird.

   a) $< x, y > := \sum\limits_{i=1}^{n} x_i|y_i|$

   b) $< x, y > := \left|\sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i\right|$

c) $< x, y > := \left( \sum_{i=1}^{n} x_i \right) \left( \sum_{j=1}^{n} y_j \right)$.

3. Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ versehen mit dem üblichen Skalarprodukt.

   a) Es sei $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

   Für welche $i, j$ gilt $a_i \perp a_j$ ?

   b) Man berechne den Öffnungswinkel $\alpha(x, y)$ für $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   c) Wir betrachten $\mathbb{R}^4$ versehen mit dem üblichen Skalarprodukt. Man berechne den Öffnungswinkel $\alpha(u, v)$ für $u = (3, -1, 2, 1)$ und $v = (1, 2, 4, -1)$.

4. Die reelle $3 \times 3$- Matrix A sei gegeben durch

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Für $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ sei

$$< x, y > := \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i y_j.$$

   Man zeige, dass hierdurch ein Skalarprodukt definiert wird. Hinweis: Zum Nachweis der positiven Definitheit benutze man einen Satz, den wir in M2 (Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Variablen) kennen gelernt haben.