

Übungen zu Mathematik III für Studierende der Informatik

T. Andreae, R. Stanik

WS 05/06

Blatt 3

A: Präsenzaufgaben am 17.11.2005

1. Die betrachteten Vektorräume seien Unterräume des \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 . Man bestimme $U_1 + U_2$ und $U_1 \cap U_2$ für

- a) $U_1 = L((1, 0), (1, 1)), \quad U_2 = L((1, 2))$
- b) $U_1 = L((1, 0)), \quad U_2 = L((1, 2))$
- c) $U_1 = L((0, 0, 1), (0, 1, 1)), \quad U_2 = L((1, 1, 0), (2, 1, 0))$

2. Welche der folgenden Abbildungen sind Homomorphismen?

$$f(x, y) := (x, xy), \quad f(x, y) := (3x - 5y, 0).$$

3. Es sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit $f(1, 0, 0) = (1, 2)$, $f(0, 1, 0) = (-1, 0)$ und $f(0, 0, 1) = (3, 1)$. Man berechne $f(v)$ für $v = (-3, 7, 5)$.

B: Übungsaufgaben zum 24.11.2005

1. Welche der folgenden Abbildungen sind Homomorphismen?

a) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: \quad f(x, y) := (x - 2y, 2x + 3y), \quad f(x, y) = (\sin x, \cos x)$

b) $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2: \quad f(x, y, z) := (x + y, y + z), \quad f(x, y, z) = (x, 0)$

2. Man bestimme Kern f , Bild f (durch Angabe jeweils einer Basis) und den Rang von f für

a) $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) := \left(\sum_{i=1}^4 x_i, \sum_{i=1}^3 x_i, \sum_{i=2}^4 x_i \right).$

b) $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5 \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) := (x_1 + x_2, x_3 - x_4, x_1 + x_2, x_3, 2x_4).$

3. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ der Körper mit zwei Elementen. Wie viele Abbildungen $f : K^3 \rightarrow K^2$ gibt es und wie viele davon sind linear? (Hinweis: Man überlege sich zunächst, wie viele Elemente K^n hat. Außerdem gucke man sich noch einmal Bemerkung 2, Jänich S. 84 an).

4. Man beweise: Ist $(v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s)$ eine Basis von U und $(v_1, \dots, v_r, z_1, \dots, z_t)$ eine Basis von W , so gilt $L(v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s, z_1, \dots, z_t) = U + W$.