Übungen zu Mathematik III für Studierende der Informatik

T. Andreae, R. Stanik

WS 05/06 **Blatt 7**

A: Präsenzaufgaben am 15.12.2005

1. Zur Berechnung einer 3 - reihigen Determinante kann man die Regel von Sarrus (¨ Jägerzaun-Regel¨) verwenden. Man weise anhand der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   nach, dass entsprechendes Vorgehen im Falle von 4 - reihigen Matrizen im Allgemeinen nicht zum richtigen Ergebnis führt.

2. Man berechne die Determinante der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die durch $f(x, y, z) := (2x, 2x + y, 2x + 2y + z)$ gegeben ist.

3. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear mit $\dim \operatorname{Kern} f = 1$. Was weiß man über $\det f$?

B: Übungsaufgaben zum 22.12.2005

1. Man berechne die Determinante von $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit

$$a_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{falls } i = j \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Hinweis: Man addiere zunächst jede der ersten $n-1$ Zeilen zur letzten Zeile; danach stelle man durch bestimmte Spaltenumformungen eine obere Dreiecksmatrix her.

2. Für $n \geq 2$ sei $\tilde{A}$ die komplementäre Matrix zur Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$.

   a) Man berechne $\tilde{A}$ für $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ und bestätige für dieses A die Formel für $A\tilde{A}$ im Jänich auf S. 146 unten.

   b) Man zeige, dass für $n = 2$ stets $\tilde{\tilde{A}} = A$ gilt.

c) Man zeige durch Angabe eines Beispiels, dass $\tilde{\tilde{A}} = A$ nicht für alle $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ gilt.

3. Sei $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   a) Wie lautet die Permutation π^2?

   b) Schreibe π und π^2 in Zyklenschreibweise.

   c) Bestimme sign π und sign π^2.

   d) Schreibe π und π^2 als Produkt von Transpositionen.

4. Die Matrix $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ sei gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

   a) Man berechne A^{-1} mit dem im Jänich auf S. 123 ff angegebenen Verfahren.

   b) Man bestimme $\det A$ und $\det A^{-1}$.

   c) $B \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ sei gegeben durch

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ 9 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Man bestimme $\det(AB)$.