Übungen zu Mathematik III für Studierende der Informatik

T. Andreae, R. Stanik

WS 05/06 **Blatt 9**

A: Präsenzaufgaben am 19.01.2006

1. Man bestimme das charakteristische Polynom sowie sämtliche Eigenwerte und Eigenvektoren für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$.

2. Man bestimme das charakteristische Polynom sowie sämtliche Eigenwerte und Eigenvektoren für die Matrix $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, K)$:

   a) für $K = \mathbb{R}$,

   b) für $K = \mathbb{C}$.

B: Übungsaufgaben zum 26.01.2006

1. Für folgende Matrizen aus $M(2 \times 2, K)$ berechne man sämtliche Eigenwerte und gebe zu jedem Eigenwert λ eine Basis des zugehörigen Eigenraums E_λ an:

   a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$, wobei der zugrunde liegende Körper $K = \mathbb{R}$ sein soll;

   b) $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, wobei die Fälle $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$ getrennt zu betrachten sind.

2. Man bestimme die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume für folgende Matrizen aus $M(3 \times 3, \mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

   Man gebe die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte an.

3. a) Man berechne das charakteristische Polynom sowie sämtliche Eigenwerte und Eigenvektoren der reellen Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Man gebe eine invertierbare Matrix S an, so dass $D = S^{-1}BS$ Diagonalgestalt hat.

c) Man mache die Probe zu b): Man prüfe durch Rechnen nach, ob $D = S^{-1}BS$ tatsächlich eine Diagonalmatrix ist. (Hinweis: Da $D = S^{-1}BS$ gleichbedeutend mit $SD = BS$ ist, braucht man S^{-1} nicht zu berechnen).

4. a) Man berechne das charakteristische Polynom sowie sämtliche Eigenwerte und Eigenräume (durch Angabe einer Basis) der folgenden Matrix $A \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Man gebe die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte von A an und prüfe, ob es eine invertierbare Matrix S gibt, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.